

Особые точки на экваторе определяются из условий:  $P^*(0, u) = 0$ ,  $Q^*(0, u) = 0$ .  
Находим

$$v = 0; u_\infty = \operatorname{sgn}(\alpha_m) \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{-\epsilon_1 \alpha_m} \Rightarrow M_\infty(0, u_\infty). \quad (5)$$

На рисунке 8 приведены примеры численного моделирования фазовых траекторий на сфере Пуанкаре.

## Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели с фантомным скалярным полем / Ю.Г. Игнатьев // Известия Вузов. Физика. – 2016. – Т. 59, № 12. – С. 83–86.
2. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием / Ю.Г. Игнатьев, А.А. Агафонов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып. 4. – С. 52–61.
3. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model Based on Phantom Scalar Field with Self // arXiv:1610.04443 [gr-qc]. – 2016. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1610.04443.pdf>
4. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
5. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия "Справочная математическая библиотека" / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1989. – Вып. 11. – 489 с.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE PHASE TRAJECTORIES TOPOLOGICAL STRUCTURE OF COSMOLOGICAL MODELS WITH SCALAR INTERACTION

A.A. Agathonov

*The results of numerical modeling of phase trajectories of cosmological models with minimal classical and phantom scalar interaction are considered.*

Keywords: numerical simulation, qualitative analysis, cosmological models.

УДК 530.12:531.51:519.711.3

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА АСИММЕТРИЧНОМ СКАЛЯРНОМ ДУБЛЕТЕ, ВЫПОЛНЕННЫЙ С ПОМОЩЬЮ СКМ MAPLE

Ю.Г. Игнатьев<sup>1</sup>, И.А. Кох<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [ignat'ev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignat'ev_yu@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> [irina\\_kokh@rambler.ru](mailto:irina_kokh@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье проведен численный анализ космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете «классическое + фантомное скалярное поле» с минимальным взаимодействием.*

**Ключевые слова:** фантомные скалярные поля, асимметричный скалярный дублет,

космологические модели, качественный анализ, численное моделирование, СКМ Maple.

## 1. Введение

В работе [1] был проведен качественный анализ космологической модели, основанной на асимметричным скалярным дублетом, представляющем систему, состоящую из двух невзаимодействующих между собой классического и фантомного скалярного полей с самодействием, минимально взаимодействующих с гравитационным полем. Функция Лагранжа скалярного дублета имеет вид:

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - 2V(\Phi) \right) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} \left( g^{ik} \phi_{,i} \phi_{,k} - 2v(\phi) \right), \quad (1)$$

где

$$V(\Phi) = -\frac{\alpha}{4} \left( \Phi^2 + \frac{m^2}{\alpha} \right)^2; \quad (2)$$

$$v(\phi) = -\frac{\beta}{4} \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\beta} \right)^2 \quad (3)$$

– потенциальная энергия Хиггса, соответствующих скалярных полей,  $\alpha$  и  $\beta$  – константы их самодействия,  $m$  и  $m$  – их массы квантов; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц  $\epsilon_1, \epsilon'_1 = 1$ , для поля с притяжением одноименно заряженных частиц  $\epsilon_1, \epsilon'_1 = -1$ .

Тензор энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (1) принимает стандартный вид:

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + 2V(\Phi) g_{ik}) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} (2\phi_{,i} \phi_{,k} - g_{ik} \phi_{,j} \phi^{,j} + 2v(\phi) g_{ik}). \quad (4)$$

Вариация функции Лагранжа (1) приводит к уравнениям поля:

$$\square \Phi + V'(\Phi) = 0; \quad (5)$$

$$\square \phi + v'(\phi) = 0. \quad (6)$$

Перенормировка (1) (см. [2]), приводит к следующему виду функции Лагранжа:

$$L = \frac{\epsilon_1}{8\pi} \left( g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} - m^2 \Phi^2 + \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} \left( g^{ik} \phi_{,i} \phi_{,k} + m^2 \phi^2 + \frac{\beta}{2} \phi^4 \right). \quad (7)$$

Тензор энергии – импульса относительно функции Лагранжа (7) равен

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi} (2\Phi_{,i} \Phi_{,k} - g_{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + g_{ik} m^2 \Phi^2 - g_{ik} \frac{\alpha}{2} \Phi^4) + \frac{\epsilon'_1}{8\pi} (2\phi_{,i} \phi_{,k} - g_{ik} \phi_{,j} \phi^{,j} - g_{ik} m^2 \phi^2 - g_{ik} \frac{\beta}{2} \phi^4). \quad (8)$$

Стандартной вариационной процедурой над функцией Лагранжа в форме (7) получаем уравнения свободных классического и фантомного полей:

$$\square \Phi + m_*^2 \Phi = 0; \quad (9)$$

$$\square \phi - m_*^2 \phi = 0, \quad (10)$$

где  $m_*, m_c$  – эффективные массы скалярных бозонов. Уравнения Эйнштейна с космологическим членом имеет вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = \lambda g^{ik} + 8\pi T^{ik}, \quad (11)$$

где  $\lambda \geq 0$  – космологическая постоянная.

Рассматривается самосогласованная система уравнений космологической модели (9), (10), (11), основанной на свободном асимметричном скалярном дублете и пространственно-плоской метрики Фридмана

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (12)$$

полагая  $\Phi = \Phi(t)$ ,  $\phi = \phi(t)$ .

Указанная система состоит из одного уравнения Эйнштейна

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \equiv 3H^2 = \epsilon_1 \left( \dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \epsilon'_1 \left( \dot{\phi}^2 - m^2 \phi^2 - \frac{\beta}{2} \phi^4 \right) + \lambda \quad (13)$$

и двух уравнений скалярного поля:

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + m_*^2 \Phi = 0, \quad (14)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - m_*^2 \phi = 0. \quad (15)$$

Исследуется классическое поле с отталкиванием одноименно скалярно заряженных частиц, полагая  $\epsilon'_1 = +1$ . В этом случае система уравнений (13), (14), (15) принимают окончательный вид:

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 + \epsilon'_1 \left( \dot{\phi}^2 - m^2 \phi^2 - \frac{\beta}{2} \phi^4 \right) + \lambda, \quad (16)$$

$$\ddot{\Phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + m^2 \Phi - \alpha \Phi^3 = 0, \quad (17)$$

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - m^2 \phi - \beta \phi^3 = 0. \quad (18)$$

Инвариантное космологическое ускорение  $\Omega(t)$  выражается следующим образом с помощью коэффициента баротропии  $\kappa = p/\epsilon$ :

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa). \quad (19)$$

Переходя к безразмерному комптоновскому времени:

$$mt = \tau; \quad (m \neq 0) \quad (20)$$

и проводя стандартную замену переменных  $\Phi' = Z(\tau)$ ,  $\phi' = z$ , ( $f' \equiv df/d\tau$ ), пришли к безразмерному виду уравнения Эйнштейна (13):

$$H'^2_m = \frac{1}{3} \left[ Z^2 + \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 + \epsilon'_1 \left( z^2 - \mu^2 \phi^2 - \frac{\beta_m}{2} \phi^4 \right) + \lambda_m \right], \quad (21)$$

а уравнения поля (14), (15) привели к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в четырехмерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_4 : \{\Phi, Z, \phi, z\}$ :

$$\begin{aligned}\Phi' &= Z; \\ Z' &= -\sqrt{3}Z \sqrt{Z^2 + \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \epsilon'_1 \left( z^2 - \mu^2 \phi^2 - \frac{\beta_m}{2}\phi^4 \right) + \lambda_m - \Phi + \alpha_m \Phi^3}; \\ \phi' &= z; \\ z' &= -\sqrt{3}z \sqrt{Z^2 + \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4 + \epsilon'_1 \left( z^2 - \mu^2 \phi^2 - \frac{\beta_m}{2}\phi^4 \right) + \lambda_m + \phi + \beta_m \phi^3},\end{aligned}\quad (22)$$

где введены безразмерные параметры:

$$\lambda_m \equiv \frac{\lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}; \quad \beta_m \equiv \frac{\beta}{m^2}; \quad \mu \equiv \frac{m}{m}.$$

При этом:

$$\frac{a'}{a} \equiv \Lambda' = H_m \equiv \frac{H}{m}; \quad \Omega = \frac{aa''}{a'^2} \equiv 1 + \frac{h'}{h^2}, \quad (23)$$

где

$$\Lambda = \ln a(\tau). \quad (24)$$

Заметим, что в этих обозначениях все величины задачи  $\Phi, Z, H_m, \alpha_m, \beta_m, \mu, \Omega, \tau$  являются безразмерными; время  $\tau$  при этом измеряется в комптоновских масштабах по отношению к классическому скалярному полю.

Таким образом, имеем автономную двумерную динамическую систему в четырехмерном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_4 : \{\Phi, Z, \phi, z\}$ .

## 2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы определяются системой алгебраических уравнений (см., например, [3], [4]):

$$M: \quad F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Решая, приходим к следующим условиям для нахождения особых точек динамической системы:

$$\begin{aligned}Z &= 0, \quad z = 0; \\ x(1 - \alpha_m x^2) &= 0; \\ y(1 + \beta_m y^2) &= 0.\end{aligned}$$

1.  **$M_0$ :** При любых значениях  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  и  $\lambda_m \geq 0$  система алгебраических уравнений (25) всегда имеет тривиальное решение:

$$x = 0; \quad Z = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \Rightarrow M_0 : (0, 0, 0, 0).$$

Необходимое условие вещественности решений в особой точке:  $\lambda_m \geq 0$ .

2.  $M_{01}, M_{02}$ : При любых  $\alpha$  и  $\beta < 0$  – еще два симметричных по  $\phi$ :

$$x = 0; Z = 0; \quad y_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{-\beta_m}}; \quad z = 0 \Rightarrow M_{01}(0, 0, |x_{\pm}|, 0); \quad M_{02}(0, 0, -|x_{\pm}|, 0).$$

Необходимое условие вещественности решений в особых точках  $M_{01}, M_{02}$ :

$$\frac{\epsilon'_1}{|\beta_m|} \left( \frac{1}{2} - \mu^2 \right) + \lambda_m \geq 0.$$

3.  $M_{10}, M_{20}$ : При любых  $\alpha$  и  $\beta > 0$  – еще два симметричных по  $\Phi$ :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_m}}; \quad Z = 0; \quad y = 0; \quad z = 0 \Rightarrow M_{10}(|x_{\pm}|, 0, 0, 0); \quad M_{20}(-|x_{\pm}|, 0, 0, 0).$$

Необходимое условие вещественности решений в особых точках  $M_{10}, M_{20}$ :

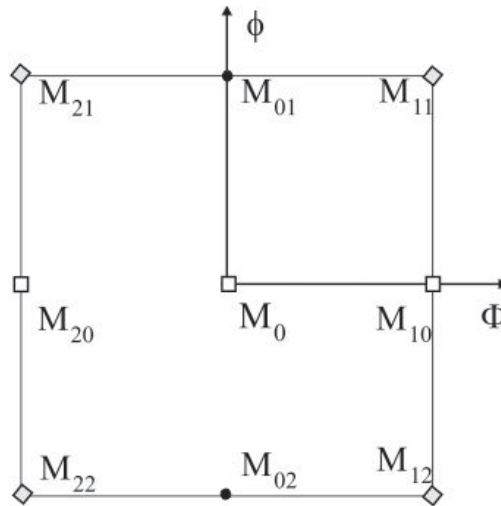
$$\frac{2}{\alpha_m} + 2\lambda_m - 1 \geq 0.$$

4.  $M_{12}, M_{21}, M_{11}, M_{22}$ : При  $\alpha > 0$  и  $\beta < 0$  – еще четыре симметричных по  $\Phi$  и  $\phi$ :

$$x_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_m}}; \quad Z = 0; \quad y_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{-\beta_m}}; \quad z = 0 \Rightarrow$$

$$M_{11}(|x_{\pm}|, 0, |y_{\pm}|, 0); \quad M_{12}(|x_{\pm}|, 0, -|y_{\pm}|, 0);$$

$$M_{21}(-|x_{\pm}|, 0, |y_{\pm}|, 0); \quad M_{22}(-|x_{\pm}|, 0, -|y_{\pm}|, 0).$$

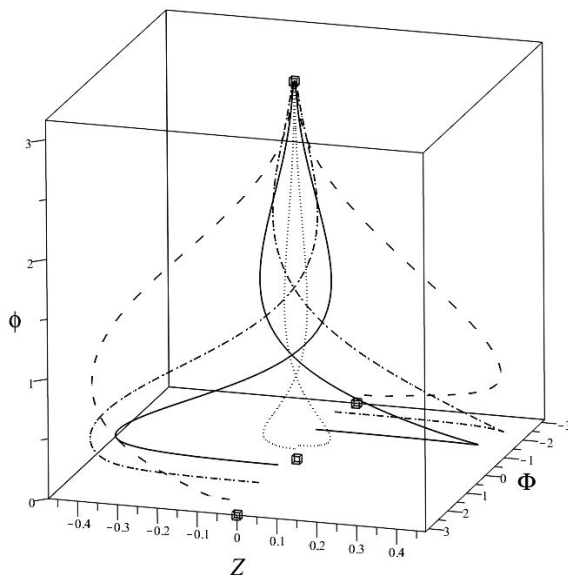


**Рис. 1.** Особые точки динамической системы (22) в фазовой плоскости  $Z = z = 0$ . Квадратами отмечены седловые точки с инвариантными многообразиями типа  $W_s^2 \times W_u^2$ , ромбами – седловые точки с инвариантными многообразиями типа  $W_s^3 \times W_u^1$ , черными кружками – притягивающие точки.

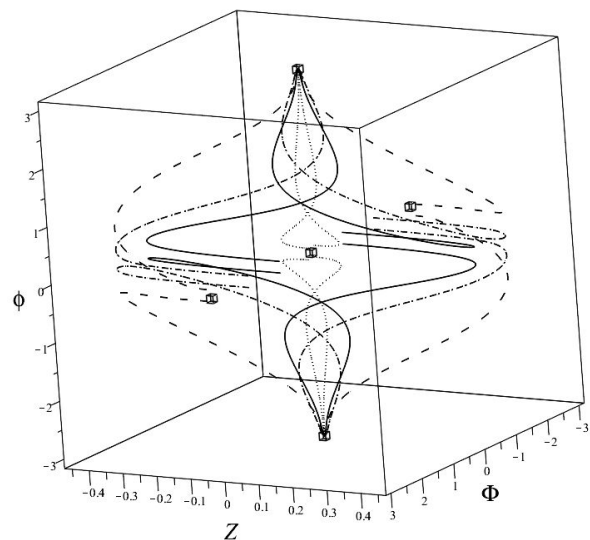
Проводя качественный анализ динамической системы (22) вблизи особых точек, приходим к следующим результатам.

- Точки  $M_0, M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$  являются *седловыми точками*, причем все выходящие из этих точек траектории лежат в одномерном многообразии  $W_u^1$ , а все входящие в эти точки траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$  входят в эти точки по трехмерному инвариантному многообразию  $W_s^3$ .
- Точки  $M_{01}, M_{02}$  являются *притягивающими точками*, причем вблизи этих особых точек асимптотические решения системы (22), либо плавно подходят к этим точкам, либо наматываются на эти точки.
- Точки  $M_{10}, M_{20}$  являются *седловыми точками*, причем все выходящие из этой точки траектории лежат в двумерном инвариантном многообразии  $W_u^2$ , а все входящие в эту точку траектории при  $\tau \rightarrow +\infty$  входят в эту точку по двумерному инвариантному многообразию  $W_s^2$ .

### 3. Численное моделирование базовых уравнений модели



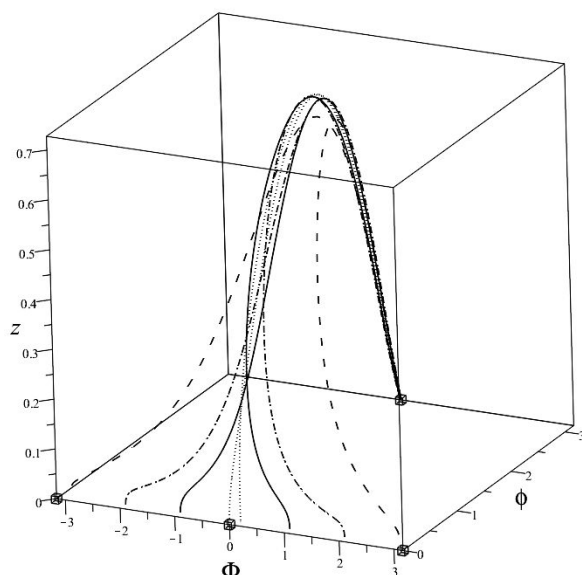
**Рис. 2.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = 0.1; z(0) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, Z, \phi\}$ ;  $\Phi(0) = -3; -2; -1; -0.1; 0.1; 1; 2; 3; Z(0) = 0; \lambda = 0; \alpha = 0.1; \beta = -0.1; \epsilon'_1 = 1$ .



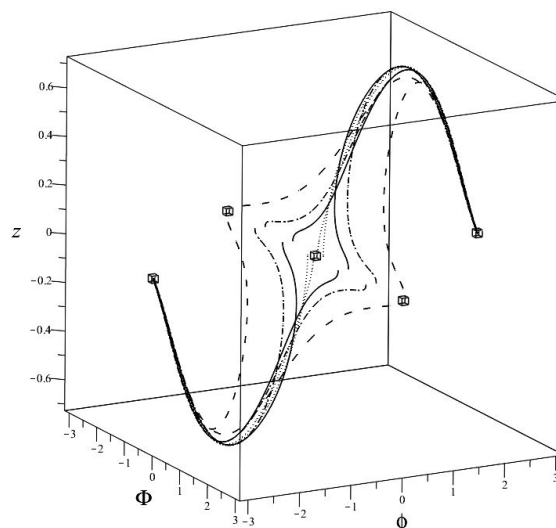
**Рис. 3.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = -0.1; 0.1; z(0) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, Z, \phi\}$ ;  $\Phi(0) = -3; -2; -1; -0.1; 0.1; 1; 2; 3; Z(0) = 0; \lambda = 0; \alpha = 0.1; \beta = -0.1; \epsilon'_1 = 1$ .

Итак, рассмотрим 4-х мерную динамическую систему (22). Численное решение системы уравнений (22) в комптоновском масштабе времени по отношению к классическому полю определяется четырьмя начальными условиями и пятью безразмерными параметрами. Численное решение в СКМ Maple17 осуществляется с помощью пакета программ `DifEqTools` (подробности см. [5]), используется команда `DifEq[NumDsolve](Eqs, IC, [method])`, где `Eqs` – система дифференциальных уравнений, `IC` – начальные условия, `method` – метод интегрирования (в данном решении

используется rkf45–метод Рунге-Кутты-Фелберга 4-5 порядка). Необходимо отметить, что вследствие чрезвычайного разнообразия фазовых треков четырехмерной динамической системы (22) в зависимости от параметров модели и начальных условий невозможно охватить в одном докладе все типы ее характерного поведения.



**Рис. 4.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = 0.1$ ;  $z(0) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, \phi, z\}$ ;  $\Phi(0) = -3; -2; -1; -0.1; 0.1; 1; 2; 3$ ;  $Z(0) = 0$ ;  $\lambda = 0$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ;  $\epsilon'_1 = 1$ .



**Рис. 5.** Трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы при наличии слабого фантомного поля с отталкиванием ( $\phi(0) = -0.1; 0.1$ ;  $z(0) = 0$ ) в подпространстве  $\{\Phi, \phi, z\}$ ;  $\Phi(0) = -3; -2; -1; -0.1; 0.1; 1; 2; 3$ ;  $Z(0) = 0$ ;  $\lambda = 0$ ;  $\alpha = 0.1$ ;  $\beta = -0.1$ ;  $\epsilon'_1 = 1$ .

На приведенных 4-х рисунках продемонстрированы результаты численного моделирования вблизи некоторых указанных выше особых точек. В частности, на рисунке 2 изображена трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы (22) в подпространстве  $\{\Phi, Z, \phi\}$  вблизи особых точек  $M_0, M_{10}, M_{20}, M_{02}$ , на рисунке 3 – вблизи особых точек  $M_0, M_{10}, M_{20}, M_{01}, M_{02}$ . На рисунке 4 показана трехмерная проекция фазовой траектории динамической системы (22) в подпространстве  $\{\Phi, \phi, z\}$  вблизи особых точек  $M_0, M_{10}, M_{20}, M_{02}$ , на рисунке 5 – вблизи особых точек  $M_0, M_{10}, M_{20}, M_{01}, M_{02}$ .

## Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологических моделей основанных на асимметричном скалярном дублете: классическое + фантомное скалярное поле. I. случай минимально взаимодействующих скалярных полей: качественный анализ / Ю.Г. Игнатьев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – № 2. – С. 36–52.
2. Ignat'ev Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles / Yu.G. Ignat'ev // Soviet Physics Journal. – 1983. – Vol. 26, № 8. – P. 1068–1072.
3. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

4. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия "Справочная математическая библиотека" / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1989. – 489 с.

5. Игнатьев Ю.Г. Численно-аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигулина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – № 4. – 2016. – С. 78–105.

#### NUMERICAL ANALYSIS IN CAS MAPLE OF COSMOLOGICAL MODEL BASED ON ASYMMETRICAL SCALAR DUBBLET

Yu.G. Ignatev, I.A. Kokh

*Numerical analysis in CAS Maple of cosmological model based on asymmetrical scalar dubblet "classical + phantom scalar field" with minimal interaction is carried.*

Keywords: phantom scalar fields, asymmetric scalar doublet, cosmological models, qualitative analysis, numerical simulation, CAS Maple.

УДК 530.12

#### КОСМОЛОГИЧЕСКИЙ СЦЕНАРИЙ С МНОГОФАЗНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ В ТЕОРИИ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

Ф.Ш. Зарипов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> farhat.zaripov@kpfu.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Данная работа является продолжением исследований автора (Grav. & Cosm., **13** (2007), No. 4; Zaripov F.Sh.//Astr. and Space Sci. : Volume 352, Issue 1 (2014), Page 289-305.), в которых предложено модифицированная теория индуцированной гравитации (ТИГ). Первоначально теория было основано на конформно инвариантном обобщении теории струн на объекты большей размерности. В рамках ТИГ и феноменологического подхода предложен механизм фазовых переходов и описания многофазного поведения космологического сценария. В рамках предложенной теории обсуждаются следующие взаимосвязанные по нашему мнению проблемы. Теория описывает две системы (стадии): эйнштейновскую и "эволюционирующую" или "перестроечную". Данный процесс напоминает явление фазового перехода, где различные фазы (эйнштейновские гравитационные системы, но с различными постоянными) переходят друг в друга.

**Ключевые слова:** космологическая модель, темная материя, скалярное поле.

#### 1. Индуцированная теория гравитации

1. Различие значений космологической постоянной, полученной из астрофизических наблюдений и предсказаний общей теории относительности (ОТО), с учетом квантовых эффектов поляризации вакуума, известно в науке как "проблема космологической постоянной" (см. С. Вайнберг: "Проблемы космологической постоянной"). Остроту этой проблемы усиливает факт, что указанное различие огромное -  $10^{120}$ .